Wir berechnen das Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Mithilfe des Residuensatzes aus der Funktionentheorie.

Wir bezeichnen den Integranden mit $f(x)$. $f(x)$ hat zwei Pole. Einen bei $x=i$ und einen bei $x=-i$. Um I zu berechnen, müssen wir einen Weg $\mathit{\Gamma}$ finden, der das Residuum bei $x=i$ einmal umrundet, auf der reellen Achse von $-R$ bis R mit $R\to\infty$ läuft und dann auf der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ wieder zu $x=-R$ zurückläuft. Da $f(x)$ für $x\to Ri$ nicht verschwindet, sondern mit R ansteigt, können wir für $f(x)$ einen geeigneten Weg $\mathit{\Gamma}$ nicht finden. Wir betrachten daher das Integral:

$$J = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Es ist:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x) + i\,sin(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Da aber $sin(x)$ ungerade ist, verschwindet das Integral über $i\,sin(x)$ und es ist $I=J$. Damit wir das Integral mit dem Residuensatz ausrechnen können, zeigen wir, dass das Integral über $\mathit{\Gamma}$ entlang der oberen Halbebene verschwindet. Dabei sei $\mathit{\Gamma}$ in ein Rechteck mit den Ecken: $-R, R, R+iR, -R+iR$ zerlegt. γ_1 ist unser gesuchtes Integral über den Weg $[-R;R]$. γ_2, γ_3 und γ_4 sind dann die 3 weiteren Kanten des Rechtecks. Sei also γ_2 parametrisiert durch $t\in[0,1]$ mit $\gamma_2 = R+iRt$. Dann ist:

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{\gamma_2} \frac{e^{iR-Rt}}{(1+(R+iRt)^2)^2}\frac{d\gamma}{dt}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{iR-Rt}}{(1+(R+iRt)^2)^2}\,iR\,dt$$

Für $R\to\infty$ und $t>0$ geht der Betrag des Zählers mit e^{-Rt} gegen 0. Da aber e^{-Rt} schneller gegen 0 geht als jede negative Potenz von R, geht das Integral für $t>0$ zu 0. Für $t=0$ zum Nenner:

$\dfrac{i\,R}{(1+R^2)^2} \to 0$ für $R\to\infty$, also

$\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx = 0$ und analog zeigt man $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx = 0$

Mit dem Integral über γ_3 parametrisiert durch $t\in[1,-1]$ mit $\gamma_3 = Rt+iR$

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{ix}}{(1+(Rt+iR)^2)^2}\,dx = \int_{\gamma_3} \frac{e^{iRt-R}}{(1+(Rt+iR)^2)^2}\frac{d\gamma}{dt}\,dt = \int_1^{-1} \frac{e^{iRt-R}}{(1+(Rt+iR)^2)^2}R\,dt$$

Das Integral über γ_3 verschwindet, da e^{-R} für $R\to\infty$ schneller als jede negative Potenz von R gegen 0 geht und der Nenner auf γ_3 niemals 0 wird. Damit gilt nun mit dem Residuum an der Stelle x=i nach dem Residuensatz:

$$J = 2\,\pi\,Res_i\,g$$

Wir berechnen das Residuum mit der Gleicheit:

$$Res_a\, g = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{(k-1)}}{dx^{k-1}}((x-a)^k \cdot g(x))\Big|_{x=a}$$

Es ist also:

$$Res_i\, g = \frac{d}{dx}\frac{e^{ix}\,(x-i)^2}{(1-ix)^2(1+ix)^2} = \frac{d}{dx}\frac{e^{ix}}{(1-ix)^2}\frac{(x-i)^2}{(1+ix)^2} = -\frac{d}{dx}\frac{e^{ix}}{(1-ix)^2} =$$

$$\frac{-\,ie^{ix}(1-ix)^2 - e^{ix}\,2i(1-ix)}{(1-ix)^4}\Big|_{x=i} =$$

$$-\frac{1}{4}(ie^{ii} + ie^{ii}) = \frac{1}{2\,i\,e}$$

Also folgt:

$$I = 2\,\pi i\, Res_a\, g = \frac{\pi}{e}$$

Da der Integrand in I gerade ist, gilt ebenfalls:

$$\int_0^\infty \frac{cos(x)}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2e}$$