Die Berechnung der Kreisfläche in kartesischen Koordinaten. Dazu denke man sich ein x-y-Koordinaten System mit einem Kreis um den Ursprung mit Radius R. Wir integrieren $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ von x=+R bis x=-R. Also wird die Fläche des Halbkreises berechnet. Wir bezeichnen die Fläche des ganzen Kreises mit A.

$$A = 2\int_{+R}^{-R} \sqrt{R^2 - x^2}\,(-dx) =$$

$$\left[R^2\,arctan\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) + x\sqrt{R^2 - x^2}\right]_{-R}^{+R} =$$

$$\frac{\pi}{2}R^2 + \frac{\pi}{2}R^2 =$$

$$\pi R^2$$

Beweis der Stammfunktion:

Sei F(x) $= \dfrac{a^2}{2}\,arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}]}\right)$ und G(x) $= \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$

Dann ist $F'(x) =$

$$\tfrac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{a^2+x^2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2 - x^2} =$$

$$\tfrac{a^2}{2} \cdot \tfrac{a^2-x^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2 - x^2} =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

Und mit $G'(x) =$

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

ergibt sich $F'(x) + G'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad q.e.d.$